

実験計画法における二値データの解析

日本エスデル(株) 松本哲夫*
日科技連 DEO 部会

1. 結 言

実験結果として、たとえば良品に0,不良品に1を与えたような場合、観測値は0と1という値しかとらない二値データとなる。このような場合に、処理効果の有無を判定する方法として観測値0,1をあたかも計量値であるかのように取扱う、いわゆる(0,1)法分散分析がある。本報では漸近理論の使えない場合すなわち n が十分大きいとは言えない場合についてシミュレーション実験により検出力を求め、(0,1)法など実際によく用いられる方法^(註1)について検討した。

2. 2水準の1元配置の場合

最も簡単な例として、繰り返しのある2水準の1元配置を考えると、データは表1.のようになえられる。表1.において x_{ij} ($i=1,2, j=1,2,\dots,n$)は0か1かの値をとり、当然 $x_{ij}^2 = x_{ij}$ である。以下に述べる各方法は n が無有限大のとき、漸近理論により一致するが、 n が十分大きいとは言えない場合、たとえば(0,1)法分散分析の場合、厳密仮説すなわち(i)すべての処理効果がなく、かつ(ii)サンプル数が大であって正規近似が可能であるというあまり意味のない場合にしか理論的には適用できないという問題がある。以下をいぞ

れの方法について、検定方法の概略を示す。

2.1 (0,1)法分散分析

NO	1	2	3	----	n	
処 理	A1	$\times 11$	$\times 12$	$\times 13$	----	$\times 1n$
	A2	$\times 21$	$\times 22$	$\times 23$	----	$\times 2n$

表 1. 2水準の1元配置のデータ

(0,1)法分散分析の場合、各平方和は次のようにして計算される。

$$S_T = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2 / 2n$$

$$= 2n\hat{p}(1-\hat{p}) \quad (1)$$

$$S_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2 / 2n$$

$$= \frac{n}{2} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)^2 = V_A \quad (2)$$

$$S_E = S_T - S_A$$

$$= n \{ \hat{p}_1(1-\hat{p}_1) + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2) \} \quad (3)$$

$$\therefore V_E = S_E / \phi_E$$

$$= \frac{1}{2} \{ \hat{p}_1(1-\hat{p}_1) + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2) \} \quad (4)$$

$$\text{ただし、} \hat{p}_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} / n \quad (i=1,2) \quad (5)$$

$$\text{また、} \hat{p} = (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) / 2 \quad (6)$$

であり、 $\phi_E = 2n - 2 = 2n$ とした。ここで F_0 すなわち V_A / V_E を $F(1, 2n; 0.05)$ と比較し、 $F_0 \geq F$ なら、仮説 H_0 :

$P_1 = P_2$ を棄却する。

2.2 逆正弦変換法

\hat{P}_1, \hat{P}_2 をそれぞれ逆正弦変換し、

$$t_0 = \frac{\sin^{-1}\sqrt{\hat{P}_1} - \sin^{-1}\sqrt{\hat{P}_2}}{\sqrt{2 \times \frac{1}{4n}}} \quad (17)$$

を $t(2n; 0.05)$ と比較し、 $|t_0| \geq t$ なら、仮説 H_0 を棄却する。

2.3 2X2分割表

表1. のデータ を表2. の 2X2分割表に書き改める。表2. において統計量 χ_0^2 、すなわち

$$\begin{aligned} \chi_0^2 &= \frac{2n \cdot [n^2(1-\hat{P}_1)\hat{P}_2 - n^2(1-\hat{P}_2)\hat{P}_1]^2}{n \cdot n \cdot 2n(1-\hat{P}) \cdot 2n\hat{P}} \\ &= SA/\hat{P}(1-\hat{P}) \end{aligned} \quad (18)$$

と $\chi^2(1; 0.05)$ を比較し、 $\chi_0^2 \geq \chi^2$ なら、仮説 H_0 を棄却する。

	良品		不良品	計
	A1	A2		
故障	$n \cdot (1-P_1)$	nP_1		n
修理	$n \cdot (1-P_2)$	nP_2		n
	$2n \cdot (1-P)$	$2nP$		$2n$

表2. 2X2分割表

2.4 Welchの方法

帰無仮説 H_0 が正しくない時には等分散性が成立しないので、Welchの方法で大検定することが考えられる。この場合、各統計量は次のようにして計算され、自由度はサラスウェートの式で求める。

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^2 \chi_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^2 \chi_{ij} \right)^2 / n \\ &= n \hat{P}_1 (1 - \hat{P}_1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\therefore V_1 = S_1/n = \hat{P}_1 (1 - \hat{P}_1) \quad (10)$$

同様にして

$$V_2 = \hat{P}_2 (1 - \hat{P}_2) \quad (11)$$

$$\therefore t_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{(V_1 + V_2)/n}} = \sqrt{\frac{V_A}{V_E}} \quad (12)$$

を $t(\phi_E^*; 0.05)$ と比較し、 $|t_0| \geq t$ なら仮説 H_0 を棄却する。ただし

$$\phi_E^* = \frac{(V_1 + V_2)^2}{V_1^2/n + V_2^2/n} \quad (13)$$

2.5 Fisherの直接確率

2X2分割表においては超幾何分布の確率を計算することにより、正確に独立性の検定ができる。すなわち表2. の要素のうち最小のものを取り、それに対する周辺度数を固定した時、最小の要素以下のものが出現する確率が5%未満ならば仮説 H_0 を棄却する。

2.6 シミュレーション結果 (1)

図1., 図2. には $np=5$ に保った時の各方法の検出力を、 $n=10$ および $n=25$ についてそれぞれ図示した。 $n \geq 25$ においては各方法の差異はほとんどなく、一方、 $n \leq 10$ においては若干の差異が見られる。一般に、(0,1)法分散分析とWelchの方法が検出力が高く、次いで逆正弦変換であり、2X2分割表とFisherの直接確率が最も検出力が低い。

3. k水準の1元配置の場合

やや複雑な例として、繰り返しのあるk水準の1元配置を考え、データは表3. のように与えられる。また表4. の2Xk分割表のように書き改めることもできる。ここで

$$\hat{P}_i = \sum_{j=1}^k \chi_{ij} / n \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (14)$$

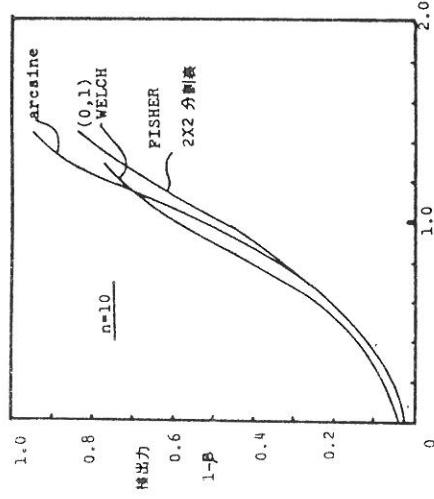


Fig. 1 SIMULATION 結果 (繰り返し10000回)
——2水準1元配置——

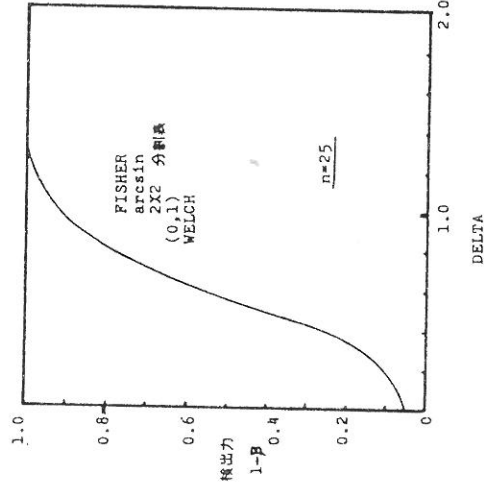


Fig. 2 SIMULATION 結果 (繰り返し10000回)
——2水準1元配置——

NO	1	2	3	----	n
欠1	A1	x<11	x<12	x<13	--- x<1n
	A2	x<21	x<22	x<23	--- x<2n
欠k	Ak	x<k1	x<k2	x<k3	--- x<kn

表 3. 多水準の1元配置のデータ

	良	品	不良	品	計
欠1	A1	n·(1- \hat{p}_1)	$n\hat{p}_1$		n
	A2	n·(1- \hat{p}_2)	$n\hat{p}_2$		n
欠k	Ak	n·(1- \hat{p}_k)	$n\hat{p}_k$		n
計	k·n·(1- \hat{p})	$k·n\hat{p}$			k·n

表 4 2Xk 分散検定

また: $\hat{p} = \sum_{i=1}^k \hat{p}_i / k$ である。(15)

3.1 (0,1)法分散分析

2.1項と同様にして表5.の分散分析表を得て

F検定し、 $F_0 \geq F$ なら H_0 : $p_1 = p_2 = \dots = p_k$ を棄却する。

S. V.	S. S.	d. f.
A: SA = $n \cdot \sum_{i=1}^k (\hat{p}_i - \hat{p})^2$		k-1
E: SE = $n \cdot \sum_{i=1}^k \hat{p}_i \cdot (\hat{p}_i - \hat{p})$		k·(n-1)
T: ST = $k \cdot n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})$		k·n-1

表 5. 分散分析表

3.2 適合度検定

表4.の2Xk分割表において、統計量 χ_0^2 は

$$\chi_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n\hat{p}_i - n\hat{p})^2}{n\hat{p}} + \frac{\sum_{i=1}^k \{n(1-\hat{p}_i) - n(1-\hat{p})\}^2}{n(1-\hat{p})}$$

$$= \frac{n \sum_{i=1}^k (\hat{p}_i - \hat{p})^2}{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{k \cdot n \cdot SA}{S_T} \quad (16)$$

となり、これと $\chi^2(k-1; 0.05)$ を比較し、 $\chi_0^2 \geq \chi^2$ なら仮説 H_0 を棄却する。

3.3 逆正弦変換法

各 \hat{p}_i を逆正弦変換して平方和を求め、 F_0 と $F(k-1; 0.05)$ を比較し、 $F_0 \geq F$ なら、仮説 H_0 を棄却する。ただし、

$$SA = \sum_{i=1}^k (\sin \sqrt{\hat{p}_i})^2 - \left(\sum_{i=1}^k \sin \sqrt{\hat{p}_i} \right)^2 / k \quad (17)$$

$$V_E = \frac{1}{4n} \quad (\phi_E = \infty) \quad (18)$$

3.4 シミュレーション結果 ($k=3$)

図3, 図4に $n \cdot p = 5$ に保った時の各方法の検出力を $n=10$ および $n=25$ について図示した。ただし、 $p_1 = p_2$ とし、 p_3 のみをスリッパージさせた場合である。 $n \geq 25$ においては各方法の差異は小さく、 $n \leq 10$ では差が

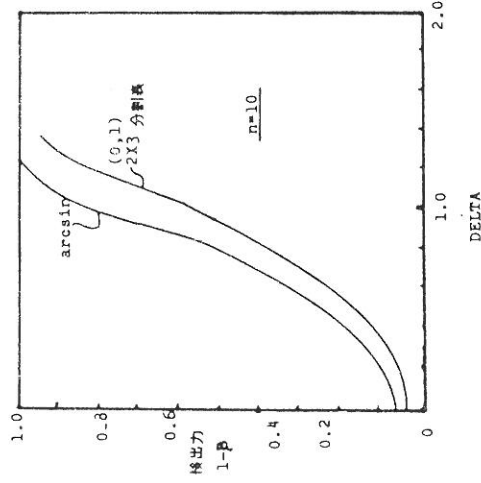


Fig. 3 SIMULATION 結果 (繰り返し10000 回)

認められ、逆正弦変換が最も検出力が高く、
次いで(0,1)法および適合度検定である。

4. 総 括

$n \leq 10$ の場合、実際には殆んど使用されないが、明らかに正規近似でできないような場合において、ここで取り上げた各方法に大きな差異は出ていない。ただし、 $\Delta = 0$ の時すなわち観測された有意水準は各方法で差が出ている。^(注2) すなわち、表6において(0,1)法やWelchの方法は、他の方法に比較して有意と出やすい結果となり、また表7において逆正弦変換は他の方法に比較して有意と出やすい結果となった。

表 6 SIMULATION 結果 (繰り返し10000 回)

N	P1	P2	DELTA (0,1)	検出力 (%)		
				arcsin	分割線	FISHER
10	0.5	0.5	0	4.73	3.92	3.87
25	0.2	0.2	0	5.73	5.83	5.73

[Observed Level of Significance]

$$\text{DELTA} = \frac{|P1 - P2|}{\sqrt{P1 \cdot (1 - P1) + P2 \cdot (1 - P2)}}$$

2

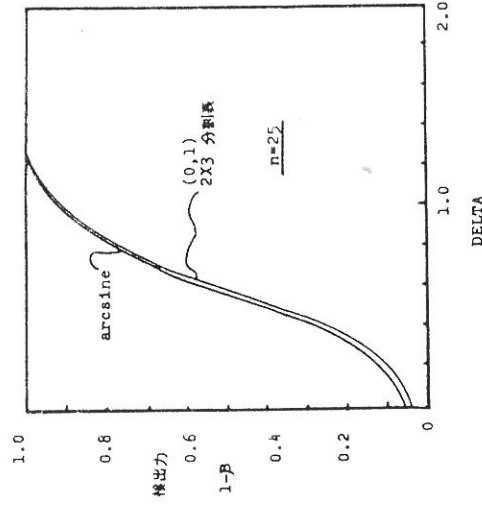


Fig. 4 SIMULATION 結果 (繰り返し10000 回)

表 7 SIMULATION 結果 (繰り返し10000 回)

N	P1	P2	P3	DELTA (0,1)	検出力 (%)		
					arcsin	分割線	FISHER
10	0.5	0.5	0.5	0	4.28	4.28	7.74
25	0.2	0.2	0.2	0	4.61	4.61	5.60

[Observed Level of Significance]

$$\text{DELTA} = \frac{|P1 - P3|}{\sqrt{P1 \cdot (1 - P1) + P2 \cdot (1 - P2) + P3 \cdot (1 - P3)}}$$

3

(注1) 従って、尤度比検定や、Logistic変換などは、取り上げなかった。

(注2) 有意水準を5%に近づけるためには Yates の補正やランダムイズド検定を用いるべきであるが、繁雑さを避けるためのみならず、実際の使用頻度を考え、これらを除外した。

5. 結 言

(0,1)法をはじめ、種々の計数値データの取扱い法の検出力をシミュレーションにより比較検討した。本研究にあたり、神戸商大・田坂教授をはじめ、日科技連 EIT 部会の諸氏より有益な御助言を得た。ここに深甚なる謝意を表する次第である。